

5 Logic & Boolean Algebra

CS-ICT-GIS

Faculty of Informatics, MSU

1

Outline

- Logic
- Truth Table
- Boolean Algebra

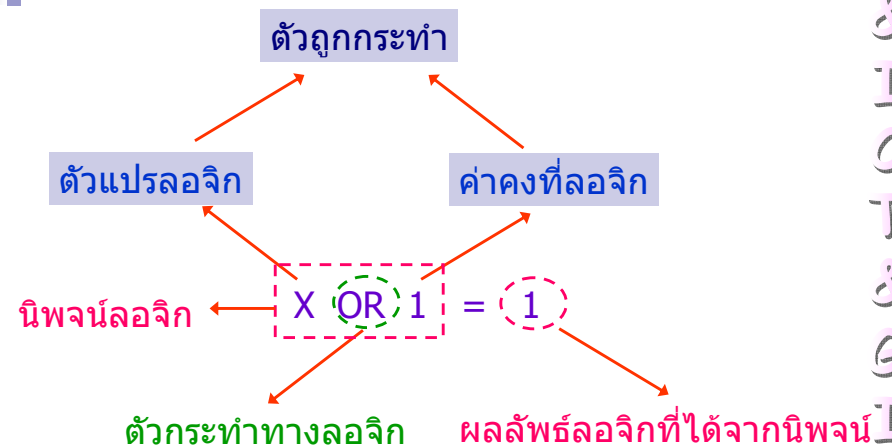
2

สมการลอจิก : Logic Equation

- คือการรวมกันของนิพจน์ลอจิก ดังเช่น
 $Z = X \text{ AND } Y$
 $A = B \text{ OR } 1$
- นิพจน์ลอจิก (Logic Expression)
ประกอบด้วยตัวกระทำทางลอจิก และตัวถูกกระทำทางลอจิก (ตัวแปรลอจิก หรือค่าคงที่ลอจิก) ซึ่งนิพจน์ลอจิกจะให้ค่าผลลัพธ์ลอจิกออกมา 1 ค่า
- ตัวแปรลอจิก (Logic Variable)
มีสถานะได้เพียงสองสถานะเท่านั้น และจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งเท่านั้น เรียกว่า "ตัวแปรสองสถานะ" (Bi-State Variable)
- ตัวกระทำทางลอจิก (Logic Operators)
รับเอาตัวแปรลอจิกมาดำเนินการเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ โดยผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกระทำและสถานะของตัวแปรลอจิกที่ถูกกระทำ

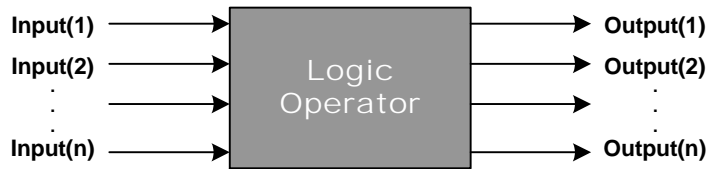
3

ตัวอย่างสมการลอจิก



4

Logic Operator



ถ้ามีตัวแปรอินพุตจำนวน n ตัว จะมีสถานะที่แตกต่างกันทั้งหมด 2^n กรณี

**AND, OR, NOT,
NAND, NOR, XOR, XNOR**

ตารางค่าความจริง (Truth Table)

ตารางแสดงความสัมพันธ์ค่าตรรกะระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากสมการลอจิก

A	Output
0	
1	

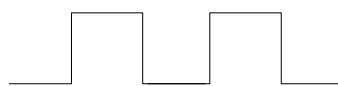
A	B	Output
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

A	B	C	Output
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

ถ้า Input เป็น 4, 5, ... แล้ว สถานะที่เป็นไปได้มีกี่สถานะ?

ดิจิทัลคอมพิวเตอร์ (Digital Computer)

- สัญญาณที่นำมาใช้ในระบบคอมพิวเตอร์
 - สัญญาณอนาลอก (Analog Signal) เป็นสัญญาณที่ต่อเนื่อง เช่น สัญญาณไฟฟ้าที่ใช้ตามบ้านทั่วไป
 - สัญญาณดิจิทัล (Digital Signal) เป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่อง เช่น สัญญาณในเครื่องคอมพิวเตอร์

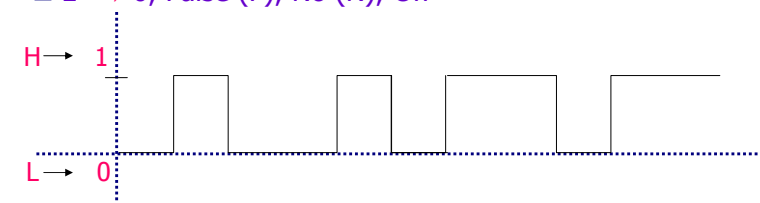


ดังนั้นคอมพิวเตอร์ จึงถูกเรียกว่าเป็น "ดิจิทัลคอมพิวเตอร์" องค์ประกอบภายในเครื่องเป็นระบบดิจิทัล หรือเลขฐานสองนั่นเอง

ลอจิกเกต (Logic Gate)

อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีการทำงานเหมือนสวิตช์ (Switch) มีสถานะเปลี่ยนแปลงไปมาได้เพียง 2 สถานะ โดยใช้ระดับแรงดันไฟฟ้าในการแทนสถานะของตัวแปรลอจิก

- แรงดันไฟฟ้าสูง (High : H) แทนด้วย 1
- แรงดันไฟฟ้าต่ำ (Low : L) แทนด้วย 0
- สถานะมีหลายรูปแบบอาจเป็น
 - H → 1, True (T), Yes (Y), On
 - L → 0, False (F), No (N), Off



AND Gate

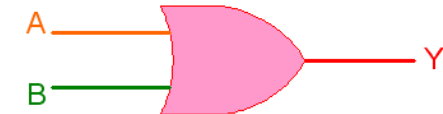


สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = A \cdot B$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR Gate

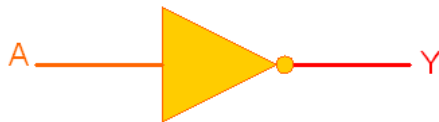


สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = A + B$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT Gate (Inverters)

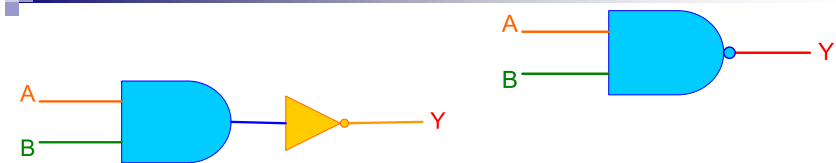


สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \bar{A}$

ตารางค่าความจริง

Input	Output
A	$f(A,B) = \bar{A}$
0	1
1	0

NAND Gate

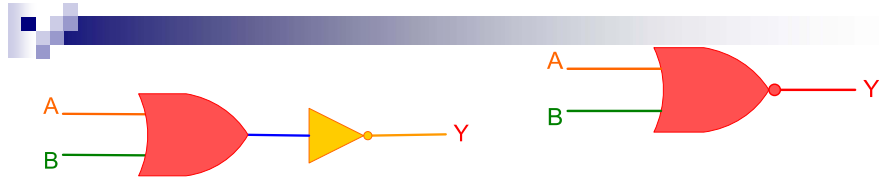


สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{A \cdot B}$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR Gate



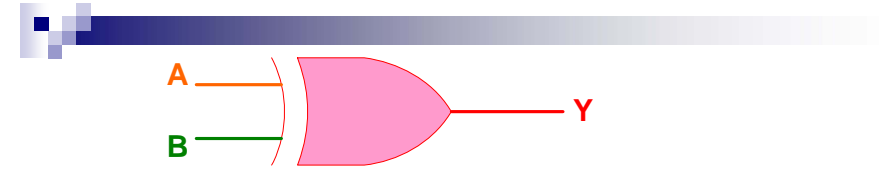
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A) = \overline{A+B}$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

13

Exclusive - OR Gate : XOR



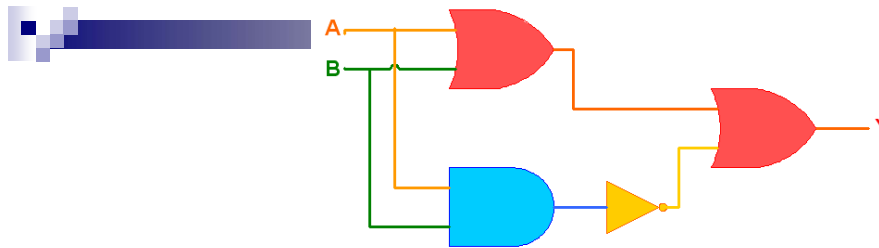
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A) = A \oplus B$

ตารางค่าความจริง

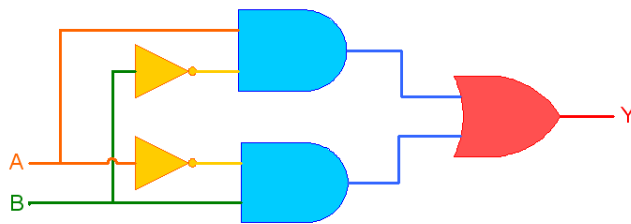
Input		Output
A	B	$f(A,B) = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

14

Exclusive - OR Gate



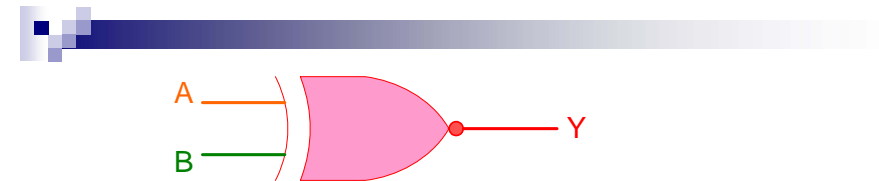
$Y = f(A) = A \oplus B = (A+B) \cdot \overline{A \cdot B}$



$Y = f(A) = A \oplus B = (A \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot B)$

15

Exclusive - NOR Gate (XNOR Gate)



สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{A \oplus B}$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

16

ลำดับความสำคัญ (Precedence)

- () → มากที่สุด
- NOT
- AND
- OR
- NAND
- NOR
- XOR
- XNOR → น้อยที่สุด

ถ้าลำดับความสำคัญเท่ากัน
ให้ทำจากซ้ายไปขวา

$$Y = A + B \cdot C + D$$

$$= A + (B \cdot C) + D$$

$$\neq (A + B) \cdot (C + D)$$

$$Z = A + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{D}$$

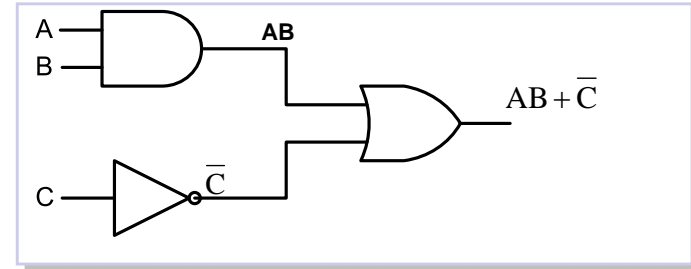
$$= A + (B \cdot \bar{C}) + (\bar{B} \cdot \bar{D})$$

$$\neq (A + B) \cdot (\bar{C} + \bar{B}) \cdot \bar{D}$$

17

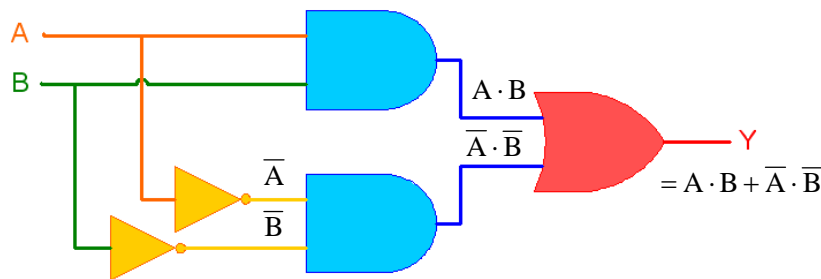
การเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรลอจิก

ใช้หลักการพิจารณารูปวงจรถลอจิกทีละส่วน โดยเริ่มจากด้านอินพุต แล้วพิจารณาไปทางเอาต์พุตตามลำดับ แล้วนำสมการในแต่ละเกตมารวมกันตามคุณสมบัติของเกตนั้น ๆ



18

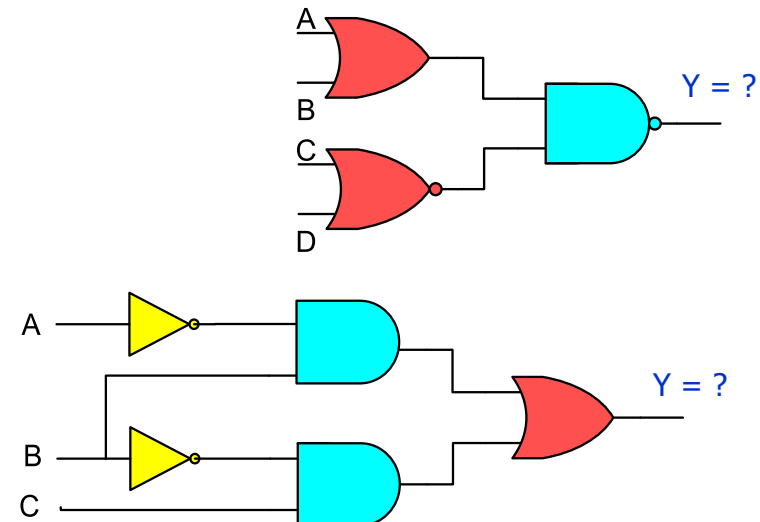
การเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรลอจิก



$$Y = f(A,B) = \overline{A \oplus B} = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B})$$

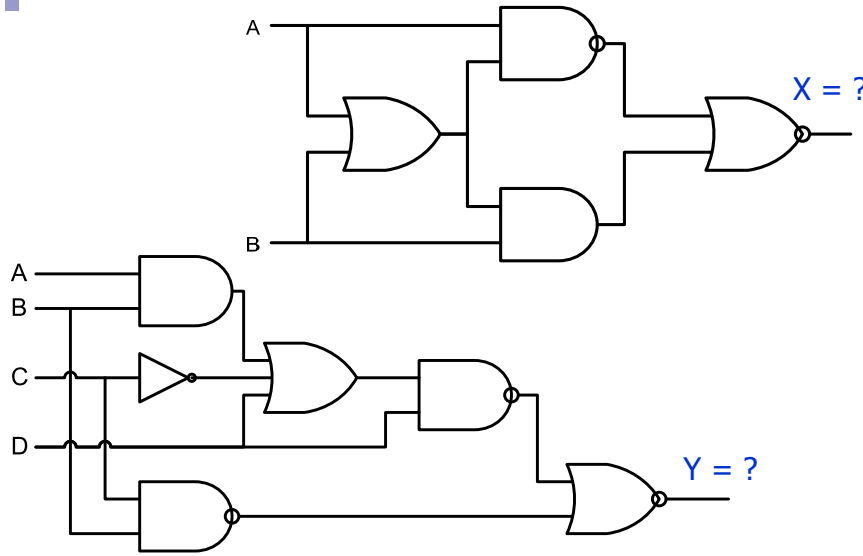
19

ตัวอย่างการเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรลอจิก



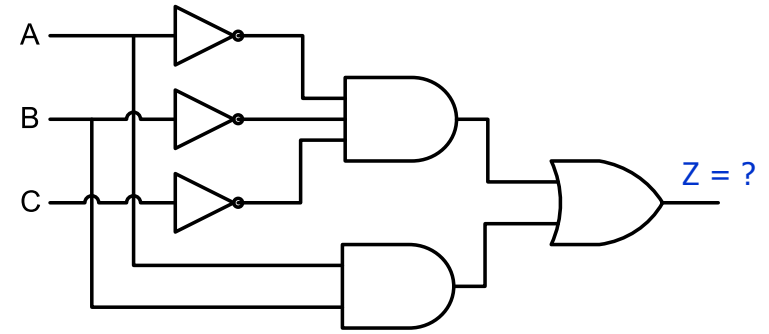
20

การเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรลอจิก



21

ตัวอย่างการเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรลอจิก

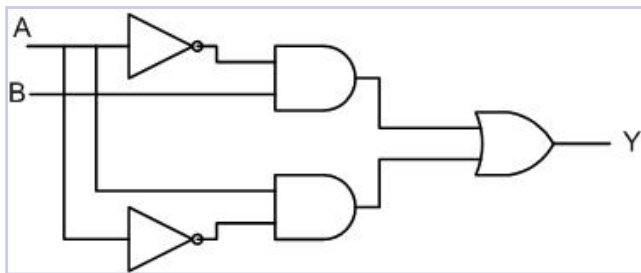


22

การเขียนวงจรลอจิกจากสมการพีชคณิต

การเขียนวงจรลอจิกจากสมการพีชคณิต ต้องพิจารณาสมการเป็นส่วน ๆ โดยเขียนจากส่วนย่อยไปหาส่วนใหญ่

$$Y = \bar{A}B + A\bar{B}$$



23

การสร้างตารางค่าความจริงเพื่อหาเอาต์พุตของสมการลอจิก

ต้องพิจารณาจำนวนตัวแปรอินพุต โดยกำหนดสถานะของอินพุตเพียง 2 สถานะเท่านั้น คือ "0" และ "1" ดังนั้น ตารางค่าความจริงจะมีจำนวนเอาต์พุตเป็นเท่าใด ขึ้นอยู่กับจำนวนอินพุต คือ **จะได้ทั้งหมด 2ⁿ** เมื่อ n คือ จำนวนอินพุต

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	$Y = \bar{A}B + A\bar{B}$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

24

ตัวอย่างการเขียนตารางค่าความจริง



A	B	C	AB	X=ABC	A+B	Y=A+B+C
0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0		
0	1	0	0	0		
0	1	1	0	0		
1	0	0	0	0		
1	0	1	0	0		
1	1	0	1	0		
1	1	1	1	1		

25

ตัวอย่าง : การเขียนตารางค่าความจริง และพิสูจน์ความสมมูลของสมการ

$$A \cdot B + C = A \cdot (B + C)$$

A	B	C	AB	AB+C	B+C	A•(B+C)
0	0	0	0		0	
0	0	1	0		1	
0	1	0	0		1	
0	1	1	0		1	
1	0	0	0		0	
1	0	1	0		1	
1	1	0	1		1	
1	1	1	1		1	

26

ตัวอย่าง : การเขียนตารางค่าความจริง และพิสูจน์ความสมมูลของสมการ

$$X = A + B \cdot C = (A + B) \cdot C$$

A	B	C	B•C	A+B•C	A+B	(A+B)•C
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

27

Boolean Algebra Method

1.กฎการตรงกันข้าม (Complement Law)

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

$$A + \bar{A} = 1$$

2.คุณสมบัติของศูนย์

$$0 \cdot A = 0$$

$$0 + A = A$$

3.คุณสมบัติของหนึ่ง

$$1 \cdot A = A$$

$$1 + A = 1$$

4.กฎการสลับที่ (Commutative Laws)

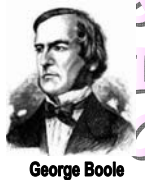
$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

5.กฎการจัดหมู่ (Associative Laws)

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$



George Boole

28

Boolean Algebra Method

6. กฎการกระจาย (Distributive Law)

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$A+(BC) = (A+B)(A+C)$$

7. กฎของเอกลักษณ์ (Identify Law)

$$A+A+\dots = A \quad AA\dots = A$$

8. กฎการลบข้าง (Negation)

$$(\overline{\overline{A}}) = A \quad \overline{\overline{\overline{A}}} = A$$

9. กฎการลดทอน (Redundancy Law)

$$A+AB = A \quad A+\overline{A}B = A+B$$

$$A(A+B) = A \quad A(\overline{A}+B) = AB$$

10. ทฤษฎีของดีมอร์แกน (Demorgan's Theorems)

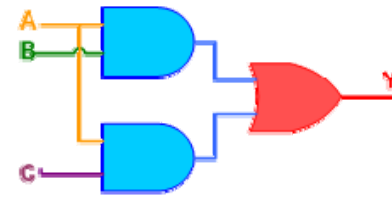
$$\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B} \quad \overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$$



Augustus de Morgan

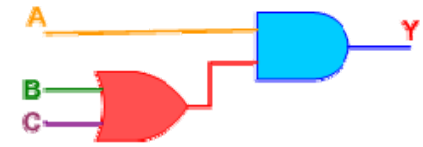
C S & I T & G I S

AB+AC vs A(B+C)



$AB+AC$

A	B	C	AB	AC	$AB+BC$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1



$A(B+C)$

A	B	C	$B+C$	$A(B+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Ex. ให้ลดรูปสมการพีชคณิตลอจิกต่อไปนี้

(1) $Y = A(B+C)\overline{A}+D$

$$Y = A(B+C)\overline{A}+D$$

$$= \overline{A}(B+C)+D$$

$$= 0(B+C)+D$$

$$= 0+D$$

$$= D$$

.....กฎการดับที่
.....กฎการตรงกันข้าม
.....คุณสมบัติของศูนย์
.....คุณสมบัติของศูนย์

(2) $Y = \overline{\overline{A+B+C}}$

$$Y = \overline{\overline{A+B+C}}$$

$$= \overline{(A+B) \cdot C}$$

$$= \overline{A+B} \cdot C$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$= (\overline{A}+\overline{B}) \cdot C$$

$$= (A+B)C$$

.....ทฤษฎีของดีมอร์แกน
.....กฎการลบข้าง
.....ทฤษฎีของดีมอร์แกน
.....ทฤษฎีของดีมอร์แกน
.....กฎการลบข้าง

C S & I T & G I S

Ex. ให้ลดรูปสมการพีชคณิตลอจิกต่อไปนี้

(3) $Y = A+\overline{A}B+A\overline{B}$ (ลดรูป แบบที่ 1)

$$Y = A+\overline{A}B+A\overline{B}$$

$$= (A+\overline{A}B)+A\overline{B}$$

$$= (A+B)+A\overline{B}$$

$$= A+(B+A\overline{B})$$

$$= A+(B+A)$$

$$= A+B$$

.....กฎการจัดหมู่
.....กฎการลดทอน
.....กฎการจัดหมู่
.....กฎการลดทอน
.....กฎของเอกลักษณ์

C S & I T & G I S

Ex. ให้ลดรูปสมการพีชคณิตลอจิกต่อไปนี้

(3) $Y = A + \bar{A}B + A\bar{B}$ (ลดรูป แบบที่ 2)

$$\begin{aligned}
 Y &= (A + \bar{A}B) + A\bar{B} && \dots\dots\dots \text{กฎการจัดหมู่} \\
 &= A + \bar{A}B && \dots\dots\dots \text{กฎการลดทอน} \\
 &= A + B && \dots\dots\dots \text{กฎการลดทอน}
 \end{aligned}$$

(5) $Y = (ABC + \bar{A})(A + \bar{C})$

$$\begin{aligned}
 Y &= (ABC + \bar{A})(A + \bar{C}) \\
 &= ABCA + ABC\bar{C} + \bar{A}A + \bar{A}\bar{C} && \dots\dots\dots \text{กฎการกระจาย} \\
 &= ABC + ABC\bar{C} + \bar{A}A + \bar{A}\bar{C} && \dots\dots\dots \text{กฎของเอกลักษณ์} \\
 &= ABC + AB \cdot 0 + 0 + \bar{A}\bar{C} && \dots\dots\dots \text{กฎการตรงกันข้าม} \\
 &= ABC + \bar{A}\bar{C} && \dots\dots\dots \text{คุณสมบัติของศูนย์}
 \end{aligned}$$

Exercise

1. ให้พิสูจน์ความสมมูลของทฤษฎี Demorgan's Theorem ดังนี้

1.1) ใช้ตารางค่าความจริง พิสูจน์ว่า

$$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

$$A + B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$$

1.2) ใช้พีชคณิตบูลีน พิสูจน์ว่า

$$\overline{\overline{X} + \overline{Y}} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

$$A \cdot B = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$$

2. จงหาคำตอบของสมการลอจิกต่อไปนี้

$$\alpha \otimes \beta = ?$$

$$X \cdot 0 = ?$$

$$Z \cdot 1 = ?$$

$$Y + 0 = ?$$

3. จงลดรูปสมการต่อไปนี้

$$\overline{AB} + \bar{C}$$

$$Y = \bar{B}(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{C})$$

4. จงเขียนตารางค่าความจริงจากสมการต่อไปนี้

$$Y = X(\bar{Y} + \bar{Z}) \oplus X(Y + Z)$$